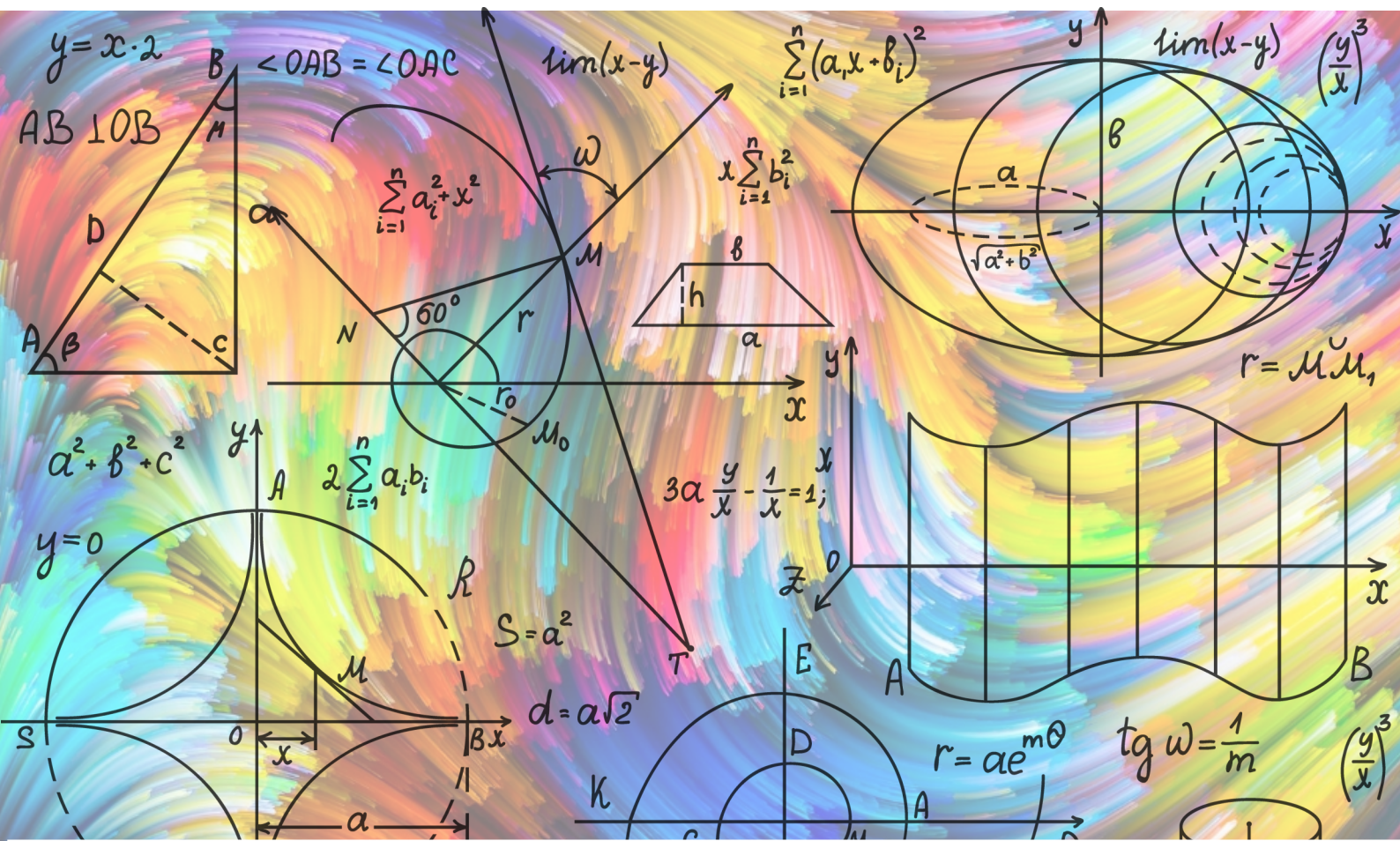
A IDEIA FUNDAMENTAL DE VARIAÇÃO NO CONTEXTO DA MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

Atividades Orientadoras de Ensino de Matemática com a ideia de variação em objeto de conhecimento em atividades escolares investigativas

VERSÃO DOCENTE

João Victor de Menezes Domingos
Orientador: Prof. Dr. Fabian Arley Posada Balvin

Esta sequência de atividades traz propostas de projetos de quantificação, estudos sobre a ideia de variação na compreensão de fenômenos naturais/sociais e análises variacionais de comportamentos hipotéticos da pandemia do COVID-19 pelo Modelo SIR.

NATAL/RN
2022

Sumário

Apresentação

O presente Produto Educacional é resultado de uma pesquisa de Mestrado Profissional intitulada "*A Ideia Fundamental de Variação no Contexto da Matemática do Ensino Médio*" vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (PPGECNM/UFRN).

Propomos contribuir com a formação do Pensamento Variacional de estudantes do Ensino Médio a partir de atividades da matemática escolar, construindo ambientes de aprendizagem onde os estudantes mobilizam a formação deste pensamento matemático, que oferece potencial alicerce à construção de distintos conceitos da matemática (CARAÇA, 1951).

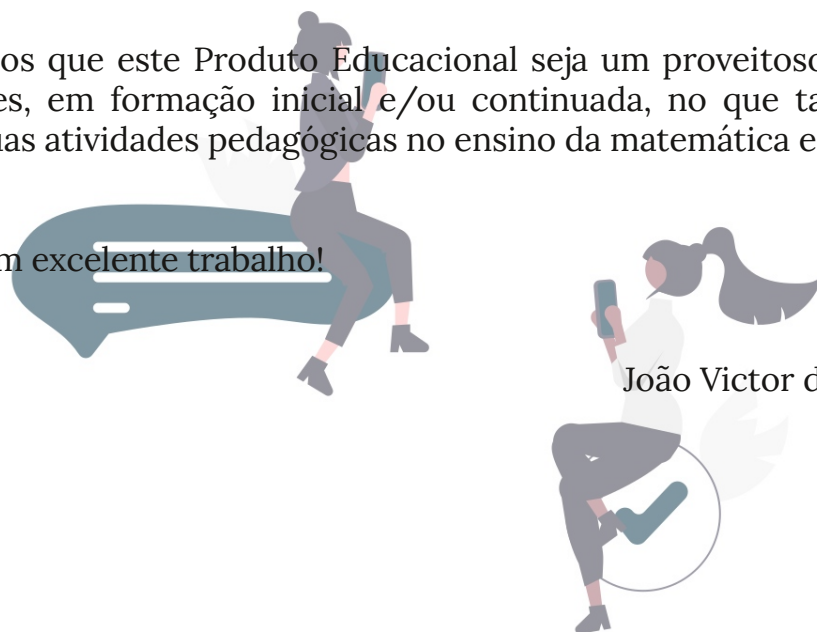
Para atingir os nossos objetivos, elaboramos uma Atividade Orientadora de Ensino (AOE) que está dividida em três tarefas: a primeira foca em problemas de investigação, onde os estudantes buscam métodos e instrumentos para realizarem atividades de quantificação com o objetivo principal de reconhecer tipos de variáveis (contínua, discreta) e selecionar métodos e instrumentos que possibilitam a conceituação quantitativa dessas variáveis; a segunda tarefa traz o conceito de variação enquanto uma ideia fundamental da matemática, sendo a formação do Pensamento Variacional um caminho para a compreensão de fenômenos naturais/sociais; e, finalmente, a terceira tarefa foca em análises variacionais do Modelo SIR de estudos epidemiológicos para estudos do COVID-19 no Brasil, onde é proposto aos estudantes que, ao analisarem comportamentos hipotéticos da pandemia expressos nos resultados do modelo matemático, reconheçam seu aspecto variacional e produzam argumentos que possam explicar o comportamento de grupos populacionais em situação de pandemia, analisando dados de magnitude discreta e contínua, buscando descrever que informações eles conseguem extrair das diferentes formas de representação dos dados do fenômeno.

Para estas tarefas foi desenvolvida uma sequência de ações e operações, sendo construídas duas versões: (1) Verão do Professor, que é esta versão, onde constam as principais orientações pedagógicas e metodológicas para do Produto Educacional, bom como as expectativas de resposta e dos cenários de aprendizagem; e (2) Versão do Estudante, com o conjunto de ações e operações necessárias para a resolução das atividades. Ou seja, o(a) professor(a) utiliza sua versão do produto para aplicar as tarefas com os estudantes, que usam versão própria.

No total, as três tarefas estão divididas em 4 (quatro) encontros de 2 (duas) horas aula cada, sendo 2 (dois) referentes à primeira situação, 1 referente à segunda e 1 à terceira.

Desejamos que este Produto Educacional seja um proveitoso instrumento usados por professores, em formação inicial e/ou continuada, no que tange a organização e avaliação de suas atividades pedagógicas no ensino da matemática escolar.

Tenha um excelente trabalho!

João Victor de Menezes Domingos

Objetivos

Objetivo geral:

- Contribuir com a formação do Pensamento Variacional com atividades investigativas para a compreensão, controle e previsão de fenômenos naturais/sociais.

Objetivos específicos:

- Estimular a escolha de métodos e instrumentos para medição e quantificação de fenômenos naturais/sociais;
- Reconhecer a importância da ideia fundamental de variação na leitura e interpretação de fenômenos naturais/sociais;
- Reconhecer formas de se estudar epidemias e pandemias;
- Estudar as contribuições de análises variacionais em comportamentos hipotéticos da pandemia do COVID-19 pelo Modelo SIR.

Tarefa 1 - Investigação: variáveis, métodos, instrumentos e resultados

(Versão do(a) Professor(a))

1º Encontro (2 h/a de 45 minutos cada)

Situação Desencadeadora da Aprendizagem (SDA)

Desafiar os estudantes à reflexão sobre processos de quantificação de fenômenos naturais/sociais, cujas magnitudes são de tipo continuas e discretas, mas difíceis de serem mensuráveis e para tal se requer métodos e instrumentos de apoio.

Motivo/Objetivo

Reconhecer e usar em projetos hipotéticos, alguns dos elementos mais importantes que compõem uma atividade investigativa de quantificação.

Ações e Operações

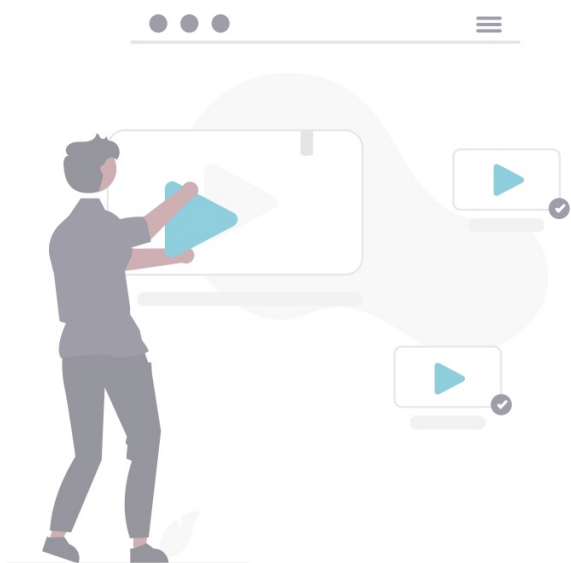
Análise de vídeo em que foram realizados distintos projetos de quantificação; desenvolvimento de projetos de quantificação de fenômenos naturais/sociais em grupo; apresentação de projeto de quantificação desenvolvidos em grupo.

Execução das ações e operações

Momento 1: Conhecendo o lugar da variável, do instrumento, do método e do resultado em atividades de quantificação.

1.1 Situação Desencadeadora da Aprendizagem: Quantificação de Números Mirabolantes

Esta é a tarefa introdutória do Produto Educacional (PE). Neste primeiro momento, sugerimos que o(a) professor(a) apresente um vídeo disponível no YouTube com acesso livre (link abaixo) onde são apresentados diferentes métodos de quantificação de valores aproximados, tendo como foco mostrar aos estudantes que cada tipo de fenômeno e grandeza pode ser observado e analisado de maneiras diferentes de acordo com os instrumentos viáveis e de que característica será analisada, que variável representativa

do fenômeno está sendo quantificada.

Cada etapa desta atividade carrega sua importância significativa para tecer os ambientes de aprendizagem que são o foco da proposta central do Produto Educacional: análises variacionais de fenômenos/situações sociais/naturais.

Antes de apresentar o vídeo, o(a) professor(a) deve entregar aos estudantes as questões abaixo que são norteadoras do debate sobre o vídeo e que constam da versão do estudante deste PE. Estas questões devem orientar as atenções dos estudantes para os focos do Momento 1 desta atividade: seleção de variáveis, métodos e instrumentos; e apresentação resultados.

Questão 1: Quais são as variáveis relevantes em cada uma das quantificações realizadas no vídeo?

Questão 2: Que métodos e instrumentos foram utilizados na medição de cada uma das quantidades calculadas no vídeo? Descreva resumidamente cada método.

Questão 3: Porque foram utilizados métodos diferentes? O que difere um método do outro?

1.1.1 Apresentação de vídeo com métodos investigativos em projeto

Números Mirabolantes:
https://www.youtube.com/watch?v=NTPij5ajhuM[1)]

Após apresentação do vídeo, conversar com os estudantes sobre suas impressões acerca do vídeo apresentado e orientá-los a responder às questões que receberam antes da apresentação do vídeo. Caso necessário, apresentar o vídeo mais uma vez.

Momento 2: Selecionando variáveis, métodos e instrumentos para a realização de uma investigação de quantificação.

Para este momento, sugerimos dividir a turma em três grupos (ou na quantidade de estimativas), determinando a numeração de cada um dos grupos por sorteio ou escolha dos estudantes.

2.1 O projeto:

Os estudantes integram uma equipe fictícia de cientistas convidada pela também fictícia Administração Nacional de Fenômenos Naturais (ANFN).

[1)] *Link de acesso disponibilizado também nas referências deste material em* VEJA (2012)

forma descontínua, realizando a discretização da variável, o peso de uma nuvem no céu.

Olá cientistas,

Solicitamos que realizam a estimativa mais próxima para os valores que necessitamos, conforme listados abaixo, apresentando os métodos escolhidos para estas medições, porquê da escolha destes métodos e a solução aproximada encontrada.

Teremos no futuro breve outros trabalhos parecidos, e desejamos que a nossa equipe experimente diferentes métodos para solução dos problemas e escolham os métodos mais viáveis a partir de cada situação que apresentarmos.

Estimativa 1: Quantas mensagens são trocadas pelo whatsapp durante um dia, incluindo mensagem de texto, vídeo, foto, áudio, emoticons, figurinhas e GIFs?

Estimativa 2: Quantos minutos de vídeo são carregados no Instagram durante um dia, incluindo stories, feeds, feels e IGTVs?

Estimativa 3: Qual o peso de uma nuvem no céu?

Teremos uma reunião em breve com os diretos a ANFN onde cada grupo terá 15 minutos para apresentar a Ficha: Relatório de Projeto Científico que segue encaminhada em anexo. Sejam criativos, os diretores estão entusiasmados para conhecer o trabalho de vocês.

Até já.

Atenciosamente.

A Presidência.

Certo dia, a presidência da ANFN encaminha uma missão surpresa para a equipe de cientistas:

A estimativa 1 solicita a quantificação de uma variável discreta, o número de mensagens que é trocada pelo aplicativo whats app.

A estimativa 2 solicita a quantificação de uma variável contínua, porém discretizada no enunciado da questão, a quantidade de minutos de vídeos postados no Instagram.

A estimativa 3 solicita a quantificação de uma variável contínua, onde, no processo de quantificação e busca de resultados possíveis, os estudantes precisarão tomá-la de orma descontínua, realizando a discretização da variável, o peso de uma nuvem no céu.

2.1.1 Diálogo com os Estudantes:

Retomar o debate sobre o vídeo apresentado e entregar a Ficha: Relatório de Projeto Científico, que consta da versão do aluno deste PE.

2.1.2 Durante a investigação dos estudantes:

- Questionar as possíveis dúvidas que os estudantes apresentem sobre a proposta da atividade, debatendo em diálogo aberto com a turma.
- Direcionar a execução desta etapa da atividade, estimulando a criatividade na escolha das variáveis, métodos e instrumentos, bem como da apresentação que será realizada no final da aula, onde os estudantes podem usar o quadro, o projetor, cartolinas, apresentação de vídeos produzidos por eles, construção de gráficos etc...
- O mais relevante neste momento é situar os estudantes que os métodos e instrumentos escolhidos estão relacionados com a natureza das variáveis (discreta, contínua) que eles estão quantificando, e que os estudantes apresentarão resultados aproximados, estimados, onde o correto/errado perde os holofotes e abre espaço ao processo de quantificação, a seleção de variáveis, métodos e instrumentos imprevisíveis.

2º Encontro (2 h/a de 45 minutos cada)

2.2.3 Socialização do Projeto e Finalização da Aula:

Quando todos os grupos sinalizarem a finalização do projeto, partimos para a apresentação, que será organizada em forma de reunião com a presidência e diretores da fictícia ANFN.

Nesta apresentação, temos o foco de socializar com toda a turma os trabalhos desenvolvidos nos grupos de modo a promover um trabalho colaborativo e coletivo.

Para isso, cada grupo de estudantes fará sua apresentação, enquanto outro grupo específico fará a análise do projeto que está sendo apresentado, em ficha de análise específica que consta na Versão do Estudante deste Produto Educacional.

O(a) professor(a) deve orientar esta etapa para que os estudantes desempenhem a função específica em cada momento da atividade (hora apresentador, hora observador).

Segue o papel que cada sujeito vai desempenhar nesta etapa da atividade.

Participantes da reunião:

- **Presidente (Docente):** Responsável pela mediação entre o grupo de cientistas e os diretores.
- **Diretor(a):** Assistir à apresentação dos projetos, e com base no que o seu grupo desenvolveu, avaliar o projeto apresentado com as suas sugestões.
- **Cientistas:** Construir o projeto e apresentar ao grupo de diretores.

Quadro 1: Distribuição de análises e apresentações.

Grupo de Diretores (Avaliadores)	Projeto Analisado (Apresentadores)
Grupo 1 (projeto 1)	Projeto 2
Grupo 2 (projeto 2)	Projeto 3
Grupo 3 (projeto 3)	Projeto 1

Fonte: Elaboração do autor (2021)

Estimamos que para as apresentações dos projetos seja reservado um tempo de 60 min (sessenta minutos), sendo 15 minutos para cada grupo apresentar os projetos e 5 minutos para cada grupo que analisou apresentar suas contribuições.

Cada grupo de diretores levantará as análises do projeto que está analisando de forma coletiva, sem interromper a apresentação, realizando os registros escritos em folha de análise que consta da versão do aluno do PE.

Ao final de todas as apresentações, abrir o diálogo para que cada grupo que realizou análise, apresente-a a turma, apontando as mudanças que perceberem necessárias em suas análises, finalizando com a entrega da ficha própria de análise ao grupo de cientistas que apresentou a proposta.

Síntese de Aprendizagem

Nesta aula os focos da aprendizagem estão centrados na análise das características

de dada situação para medição de valores estimados, introduzindo com os estudantes a natureza do processo de ensino e aprendizagem em propostas investigativas, onde a seleção de variáveis, métodos e instrumentos, as análises coletivas e a problematização protagonizam os cenários de aprendizagem.

Percebemos na atividade que existem diferentes formas de se calcularem quantidades estimadas. Por serem valores estimados, seus estudos podem ser sempre revisitados a cada momento em que novos instrumentos são criados e possibilitam maior aproximação à quantificação desejada.

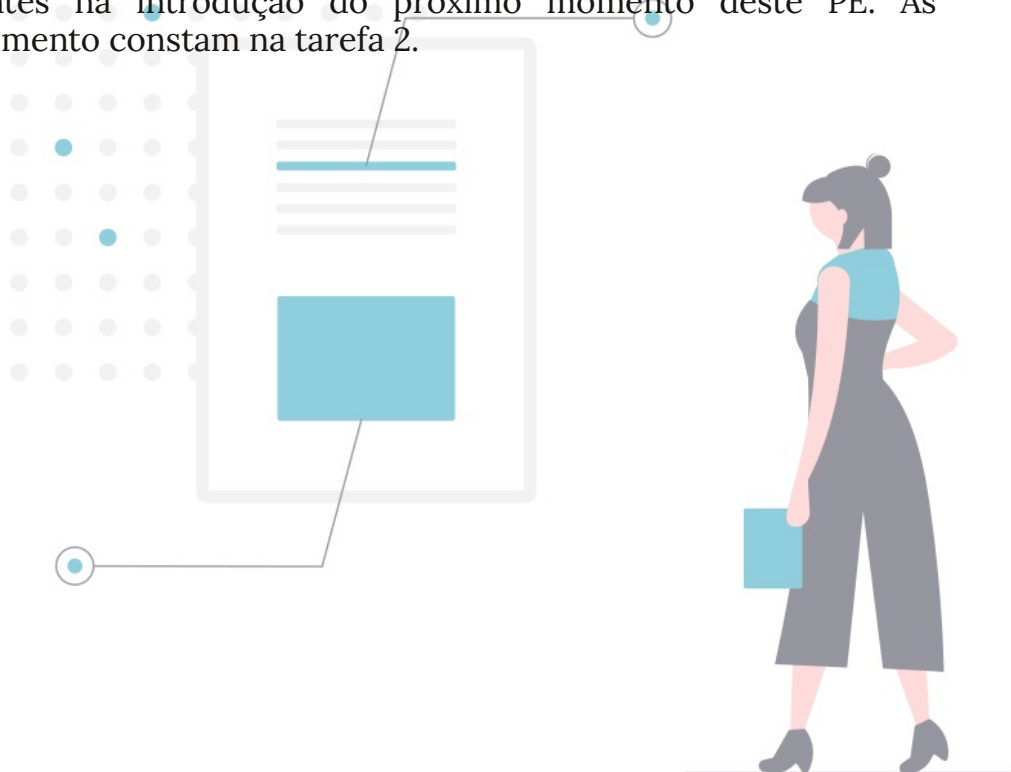
Esperamos que esta vivência seja basilar ao decorrer das seguintes atividades constitutivas deste material instrutivo, onde serão desenvolvidas atividades investigativas com focos ao estudo da variação, uma vez que a ideia do pensamento variacional se situa transversal às diversas áreas de ensino da matemática.

Debruçar-se sobre uma atividade investigativa desta natureza, requer investir na escolha de variáveis, métodos e instrumentos que são decisivos na formação do pensamento variacional (CARAÇA, 1951), onde será proposta, nas atividades seguintes, análises na perspectiva variacional, o que será corroborado com a natureza das conclusões estimadas e não fixas, deterministas, estanques, mas sim fluentes, em movimento contínuo de variação.

Tarefa para Casa

Solicitar aos estudantes que, de posse da proposta e da análise e contribuições do grupo que analisou seu projeto de quantificação, construam uma proposta final do projeto do grupo a ser entregue para aula seguinte:

1) Primeira versão do projeto;
2) Análise do grupo observador;
3) Versão final do Projeto (Conforme modelo de Ficha de Relatório de Projeto Versão .

A versão final do projeto deve ser encaminhada ao professor por meio eletrônico ou presencialmente com prazo suficiente para o professor avaliar os relatórios e socializar com os estudantes na introdução do próximo momento deste PE. As orientações acerca deste momento constam na tarefa 2.

Tarefa 2 – A Ideia Fundamental de Variação

(Versão do(a) Professor(a))

3º Encontro (2 h/a de 45 minutos cada)

Situação Desencadeadora da Aprendizagem (SDA)

Desafiar os estudantes a refletirem sobre o papel da ideia fundamental de variação em estudos investigativos na compreensão de fenômenos naturais/sociais.

Motivo/Objetivo

Apontar o conceito de variação enquanto ideia fundamental da matemática, apropriando-se deste objeto de conhecimento para a formação crítica e reflexiva acerca de fenômenos.

Ações e Operações

Construção de Nuvem de Palavras para responder: O que é variação?; leitura de texto teórico; questionário com registro escrito e debate sobre o texto.

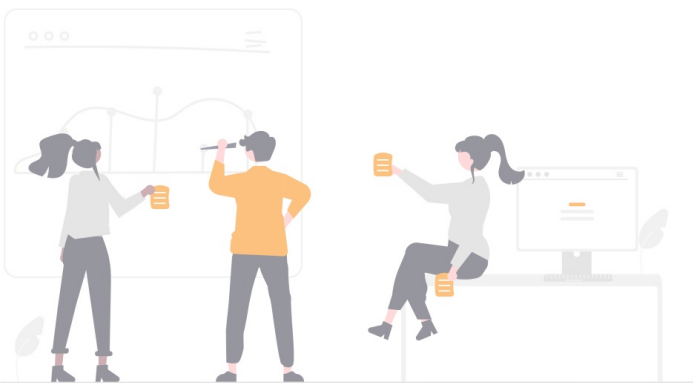
Execução das ações e operações

Momento 1: A percepção de conhecimentos prévios sobre a ideia de variação.

Orientações preliminares à aplicação

Sendo esta tarefa a continuação da aplicação deste Produto Educacional, inicialmente sugere-se que o(a) professor(a) apresente o feedback dos projetos finais (tarefa para casa) entregues pelos grupos, apontando os elementos de avaliação que utilizou e concluindo a síntese do aprendizado que consta no final da *Tarefa 1 – Investigação: variáveis, métodos, instrumentos e resultados.*

Estes feedbacks devem dar destaque às importâncias atribuídas à experiência vivenciada nesta atividade, onde os estudantes tiveram a necessidade de selecionar métodos e instrumentos de acordo com a natureza das variáveis que eles buscaram quantificar, isto na procura de resultados estimados/aproximados, favorecendo uma análise relativa ao tratamento das variáveis representativas do fenômeno.

Portanto, estão construídos os cenários basilares à proposta da segunda Situação

Desencadeadora da Aprendizagem: desafiar os estudantes a refletirem sobre o papel da ideia fundamental de variação em estudos investigativos na compreensão de fenômenos naturais/sociais.

Na avaliação dos projetos, sugere-se que o(a) professor(a) aponte para os estudantes os momentos em que ocorrem os cenários de aprendizagem esperados com o desenvolvimento da tarefa 1: seleção de variáveis, métodos e instrumentos e que relações estão estabelecidas entre cada um deste elementos; e a diversidade e criatividade na atividade investigativa, bem como a adaptação do projeto final após as colaborações apontadas pelos outros grupos. Para tanto, os trabalhos devem ter sido entregues anteriormente para que o(a) professor(a) tenha realizado a avaliação dos projetos e possa apresentar os resultados no início desta tarefa.

Após finalização do fechamento da aula anterior com a avaliação dos projetos, a tarefa 2 inicia com uma dinâmica de sondagem acerca da seguinte questão:

O que é VARIAÇÃO?

(obs.: a resposta deve ser registrada com uma palavra, comum ou composta).

Sugere-se que esta sondagem seja realizada com o suporte do *Edupulses* utilizando sua ferramenta de construção de Nuvem de Palavras.

A escolha se deu por tratar-se de um software parcialmente livre (disponível em https://edupulses.io/) onde o(a) professor(a) deve criar um evento e inserir uma atividade na categoria Nuvem de Palavras com o questionamento sugerido anteriormente para a dinâmica de sondagem.

Para criar um evento no Edupulse, o interessado deve criar um cadastro simples no site, onde estão disponíveis tutoriais de dúvidas em formato de vídeos.

Há outros aplicativos disponíveis na internet que apresentam estas mesmas ferramentas, portanto, se o(a) professor(a) já tem familiaridade com outro aplicativo que construa nuvem de palavras, ou outra ferramenta que possibilite a sondagem de conhecimentos prévios, pode/deve utilizar.

A figura a seguir mostra uma simulação de nuvem de palavras.

Figura 1 - Simulação de Nuvem de Palavras no Edupulses.

Fonte: Elaboração do autor (2021).

1.1 Percepção de conhecimentos prévios: Construindo a Nuvem de Palavras.

A percepção de conhecimentos prévios conforme descrito acima, bem como seu registro, devem ocorrer antes da socialização do texto introdutório aos estudantes.

Para a construção da nuvem de palavras, previamente deve ser certificado que os estudantes vão conseguir acessar à internet dos seus celulares ou de um computador

disponibilizado pela instituição. Como o acesso à atividade pelo aplicativo escolhido é livre e, após a inserção do PIN da atividade (gerado para o professor automaticamente pelo aplicativo), o estudante pode enviar quantas respostas quiserem, eles podem compartilhar os equipamentos tecnológicos uns com os outros, pois basta que cada estudante envie uma resposta, podendo ceder o celular, por exemplo, ao(à) colega quando finalizar sua resposta.

Caso não haja acesso à internet na instituição de aplicação da atividade, pode ser construído um mural interativo com a lousa e o pincel. Para tanto, deve ser solicitado aos estudantes que respondam em uma folha, devolvam suas respostas ao professor que deve dispor essas respostas na lousa. Os estudantes podem também escrever as respostas diretamente na lousa.

O ideal é que a identificação dos estudantes seja preservada para que as respostas sejam as mais espontâneas possíveis. Não interessa individualmente o que cada estudante responde, mas a tendência de respostas do coletivo que possibilite um debate e um consenso acerca do conceito que se objetiva estudar: variação.

Após construção da Nuvem de Palavras e exposição/diálogo com os estudantes, seguir a atividade com a leitura do texto pelos estudantes e registro escrito das respostas.

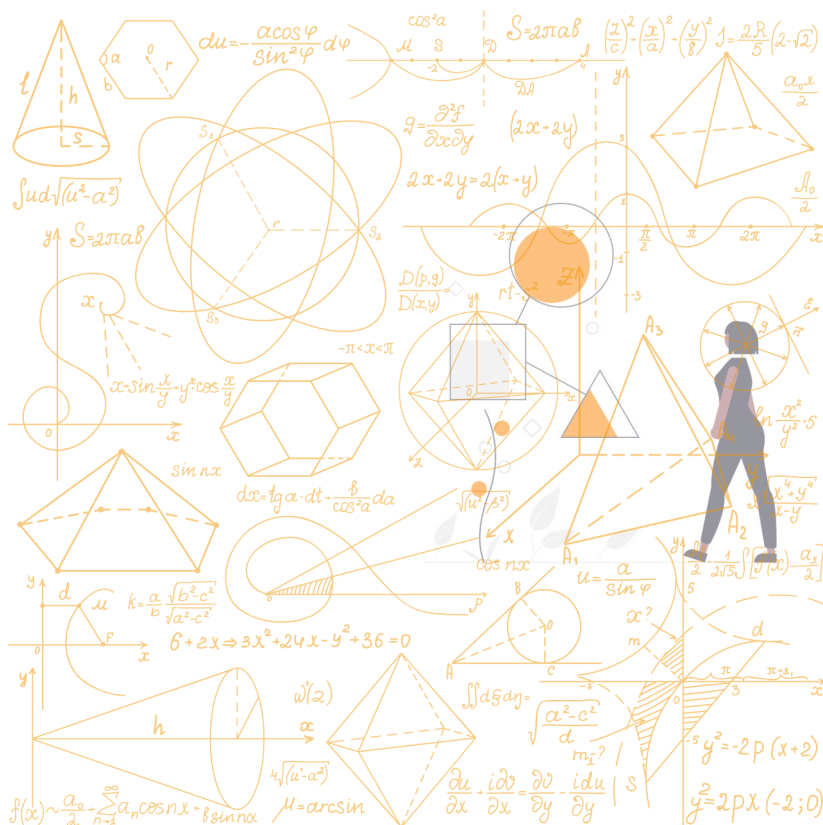
Momento 2: Leitura e reflexão do texto:

O que é Variação?

A variação é uma das ideias fundamentais da matemática. Os conceitos matemáticos que estudamos na escola são desenvolvidos pelos matemáticos a partir de suas ideias fundamentais. Você sabe por que a variação é uma ideia fundamental da matemática?

Segundo Caraça (1984), as coisas do mundo apresentam duas características essenciais: interdependência e fluência.

A primeira diz que todas as coisas estão relacionadas umas com as outras. O mundo e tudo o que nele existe é um organismo vivo com intensa comunicação e participação constante da vida uns dos outros. A segunda quer dizer que o mundo está em permanente mudança; todas as coisas, a todo o momento, se transformam; tudo flui, tudo devém. Assim, tudo se relaciona; tudo muda o tempo todo. Morte e vida estão unidas, formando um processo único de transformação e evolução.

Desta forma, conhecer a maneira como as coisas naturalmente se modificam pode ser o caminho usado pelo homem para melhor entender dado fenômeno natural/social afim de “dominá-lo”, estabelecendo as previsões necessárias para melhor organização do

seu modo de viver.

"A morte do ar causa a vida do fogo e o ar vive a morte do fogo; a água vive a morte da terra e a morte da água favorece a vida da terra". Desse modo, a morte não é o fim, a destruição total do ser, mas a fonte de uma nova vida, de um novo ciclo. Quando a morte atua, outra vida surge.

Texto adaptado do livro "*Conceitos Fundamentais da Matemática*" de Bento de Jesus Caraça. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1951.

Refletindo sobre o texto

1) O que mais lhe chamou a atenção no texto?
2) Após a leitura do texto, você mudaria alguma coisa na resposta à dinâmica inicial? O seu conceito de variação continua o mesmo? Por quê?
3) Como a ideia de variação contribui para a atividade de quantificação realizada na tarefa 1 (mensagens de Whastapp, vídeos postados no Instagram e peso de uma nuvem no céu)?
4) Para cada uma das quantificações realizadas na Atividade 1, escolha uma variávell passível de análise variacional e explique porquê.

Síntese de aprendizagem:

Esta tarefa finaliza com o debate aberto acerca das questões de reflexão do texto, trazendo para o diálogo as ideias que constam na nuvem de palavras construídas no início da tarefa, para auxiliar, em especial, o debate acerca da resposta para as perguntas sobre o texto.

A leitura do texto com as respostas destas questões sugeridas para sua reflexão buscam direcionar como alternativa para a compreensão, controle e previsão de fenômenos naturais/sociais um estudo variacional, sugerindo a incorporação da ideia fundamental de variação como objeto de conhecimento em atividades escolares (BRASIL, 2018).

Uma adequada exploração destas questões pode aprofundar este debate, onde sugerimos que, para estimular os estudantes e direcionar os focos da atividade, o professor pode levantar exemplos de fenômenos possíveis de serem estudados a partir de uma ideia variacional, para auxiliar nas respostas; bem como listar as variáveis passiveis de análise variacional dos exemplos de fenômenos que listou aos estudantes, apontando como a análise do comportamento contínuo destas variáveis caracteriza um olhar ao seu comportamento variacional.

No decorrer da aplicação das atividades seguintes do Produto Educacional, este debate será retomado e terá peso relevante quando os estudantes realizarem comparações entre dados discretos dispostos em tabelas e dados contínuos representados em gráficos.

No capítulo que introduz a dissertação de mestrado que resultou neste Produto Educacional são exemplificados dois interessantes fenômenos passíveis de uma atividade investigativa aos modelos da que vamos propor mais adiante e podem servir de inspiração para o professor utilizar neste momento do debate.

Esse debate deve finalizar com o anúncio de que, já que é possível estudar características de um fenômeno com a ideia de variação, no próximo encontro, este estudo será proposto.

Tarefa 3 – Análises variacionais da pandemia COVID-19 no Brasil pelo Modelo SIR

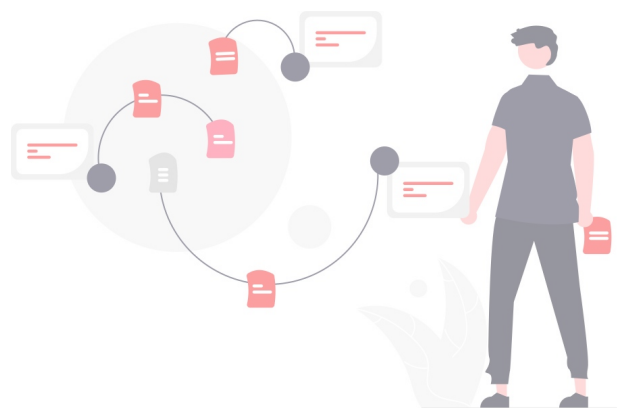
(Versão do(a) Professor(a))

4º Encontro (2 h/a de 45 minutos cada)

Orientações preliminares à aplicação

Para concretizar os planos de atividade que seguem deste Produto Educacional, mais especificamente no momento de tratamento de dados dos fenômenos que serão estudados, serão utilizadas planilhas eletrônicas e plotagem de gráficos no Excel.

Para tanto, a atividade deve ser desenvolvida em um laboratório de informática onde os estudantes possam ter acesso a um computador (individual ou em grupos).

Na impossibilidade ou inexistência desta estrutura, o(a) professor(a) pode preparar as planilhas com os resultados a serem analisados pelos estudantes, os mesmos que são simulados com o suporte da tecnologia digital.

Momento 1: Conhecendo as características do COVID-19 e levantamento de ideias do seu estudo.

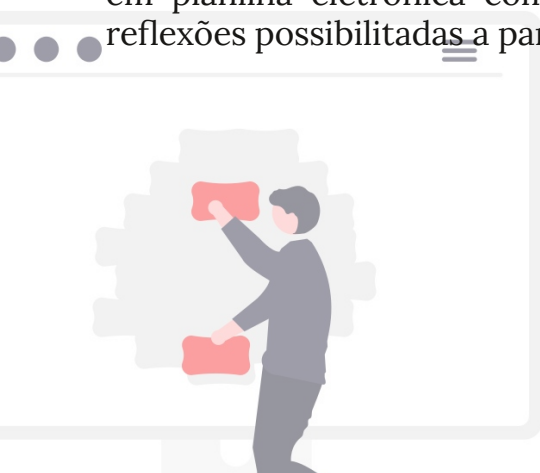
Situação Desencadeadora da Aprendizagem (SDA)

Notícia de aumento do número de morte por COVID-19 no Brasil.

Motivo/Objetivo

Estudar as possibilidades que uma análise variacional do modelo SIR oferece na compreensão do comportamento da COVID-19.

Ações e Operações

Debates sobre a notícia de aumento de mortes; simulação de modelo matemático em planilha eletrônica com análise de variação dos parâmetros; debates acerca das reflexões possibilitadas a partir da simulação do modelo matemático.

Para ambientação da atividade que segue com a situação desencadeadora da aprendizagem, sugere-se que os estudantes se organizem nos mesmos grupos das tarefas anteriores e retomem o papel dos cientistas contratados pela fictícia Administração Nacional de Fenômenos Naturais (ANFN).

Certa manhã, a Administração Nacional de Fenômenos Naturais (ANFN) recebe a seguinte notícia:

Figura 2: Situação da pandemia do COVID-19 no Brasil, de dezembro de 2020

Brasil segue com média móvel de mortes por Covid acima de 500; total de óbitos passa de 174,5 mil

País tem 174.531 óbitos e 6.436.633 diagnósticos de Covid-19, segundo levantamento do consórcio de veículos de imprensa. Média móvel de mortos pela doença está em 533 por dia.

Por G1

02/12/2020 13h01 · Atualizado há um dia

Fonte: G1 (2020).

Diante da pandemia do novo coronavírus que se espalha pelo mundo, a ANFN coleta uma série de dados das notificações oficiais do Ministério da Saúde para a situação da pandemia no Brasil, e encaminha estes dados a sua equipe de cientistas para, a partir de um estudo epidemiológico, apresentar o seu comportamento.

Na versão do aluno para deste Produto Educacional, os estudantes vão receber a manchete do Portal de Notícias G1 com a seguinte solicitação da ANFN:

Prezados cientistas,

Recebemos a notícia sobre os casos de óbitos em decorrência da infecção da população brasileira em situação de pandemia do COVID-19.

Cientes de que outros aspectos podem ser observados e apresentarem maior clareza acerca do comportamento desta doença, solicitamos ao nosso grupo de cientistas que, discutam em grupo sobre outros aspectos relacionados ao comportamento desta pandemia, e apresentam um estudo acerca desta doença no Brasil.

Atenciosamente,
A presidência.

Para iniciar os debates sobre o COVID-19 e situar a pandemia em objeto de estudo em sala de aula, após lerem esta notícia, os estudantes devem responder aos seguintes questionamentos que constam da versão do estudante deste produto educacional.

Questão 1: Que variáveis são relevantes para um estudo da pandemia do COVID-19?

Questão 2: Que métodos e instrumentos poderiam ser escolhidos para realizar o estudo destas variáveis?

Questão 3: A ideia de variação pode ser utilizada de que maneira para este tipo de estudo?

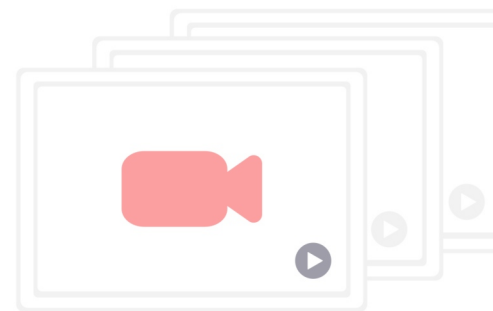
Momento 2: Selecionando o Modelo SIR para estudo do COVID-19.

2.1 Apresentação do Modelo SIR:

A apresentação do Modelo SIR (KERMACK; McKENDRICK, 1991) tem o objetivo de mostrar aos estudantes como a população está dividida em uma situação de epidemia.

Neste momento não há necessidade de mostrar aos estudantes as equações que representam cada grupo da população, ou mesmo os modelos matemáticos mais complexos já desenvolvidos para o estudo do COVID-19 no Brasil, uma vez que um dos objetivos desta tarefa está na análise dos resultados das equações que descrevem o Modelo SIR com finalidades de apropriar-se do comportamento do fenômeno em estudo, isso a partir da análise variacional de suas variáveis, com as lentes voltadas aos resultados numéricos, na forma tabular, e seu aspecto figural, pelo gráfico da linha de dispersão plotado no excel.

Para melhor compreender o Modelo SIR, disponibilizamos ao professor como material de apoio um vídeo disponível no YouTube (link abaixo).

No contexto de aplicação, orientamos apresentar aos estudantes parte deste vídeo (do início do vídeo ao tempo 2 minutos e 33 segundos), onde são mostrados os grupos da população em situação de epidemia (S = susceptíveis, I = infectados e R = recuperados), bem como as hipóteses iniciais assumidas para a utilização do presente modelo. Editamos esta parte do vídeo e disponibilizamos no link a seguir.

Vídeo a ser apresentado aos estudantes: Estoques populacionais do Modelo SIR
Link: https://www.youtube.com/watch?v=EbDjwe-LbwE

Vídeo original: Modelo SIR - Modelagem e Simulação do Mundo Físico.
Link: https://www.youtube.com/watch?v=hAd0t6s9Mns

Obs.: Outros vídeos podem ser encontrados nas plataformas disponíveis e gratuitas na internet, a exemplo do YouTube, e podem ser usados para esta apresentação inicial do modelo, assim como artigos científicos que podem ser utilizados como material de apoio para a construção desta apresentação inicial.

2.1.1 Condições de uso do Modelo SIR: Simplificações do Modelo SIR

1) St + It + Rt = N, sendo N o número total da população que se mantem constante;
2) Uma vez curada, a pessoa se torna imune à doença;
3) População homogênea, ou seja, todos os sujeitos expostos à doença apresentam as mesmas condições de infecção;
4) O fluxo de sujeitos de S para I é proporcional ao número de susceptíveis (S) e ao número de infectados (I); e
5) O fluxo de sujeitos de I para R é proporcional ao número de infectados (I).

2.1.2 Discutindo as simplificações atribuídas às condições de uso do Modelo SIR

Para discussão das condições de uso, sugerimos que seja elaborado um debate norteado pelas 6 questões dispostas no quadro 2, que consta da versão do estudante deste Produto Educacional.

Metodologicamente, sugerimos que os estudantes sejam divididos em grupos e que cada grupo fique incumbido que discutir uma parte das questões para, em momento oportuno do andamento da tarefa, socializar com os demais colegas da turma suas discussões em grupo.

A exemplo: dividir a turma em 3 grupos e cada grupo ficar responsável por debater, durante 10 minutos, 2 questões, conforme quadro 2.

O objetivo do debate orientado por estas questões é de os estudantes compreenderem melhor as simplificações do Modelo SIR apresentadas no vídeo pois, mesmo não sendo objetivo da tarefa a construção do modelo matemático que descreve o comportamento das variáveis representativas do fenômeno e sem haver a necessidade de usar as EDO para as análises, uma das formas de analisar qualitativamente esse modelo matemático é pelos resultados das EDO (numérico/tabulares e gráficos) que descrevem este modelo, percebendo a forma como as variáveis se modificam ao longo do tempo e que influência os parâmetros das EDO conferem ao comportamento variacional desses resultados.

Quadro 2 – Questões norteadores dos subgrupos de estudo.

Grupo	Questões Norteadoras
Grupo 1	**Questão 1)** Na opinião do grupo, o que significa a hipótese "St + It + Rt = N" representando o número populacional constante? **Questão 2)** Na opinião do grupo, o que significa a letra "t" subscrita aos estoques populacionais S, I e R do Modelo SIR?
Grupo 2	**Questão 3)** Na opinião do grupo, o que significa dizer que o fluxo de S para I é proporcional a S e a I? **Questão 4)** Na opinião do grupo, o que significa a taxa de cura, mencionada pelo interlocutor, e a proporcionalidade do fluxo de I para R?
Grupo 3	**Questão 5)** Das variáveis do Modelo SIR listas no vídeo, qual(is) o grupo considera mais adequada(s) e menos adequada(s) para a pandemia do COVID-19? Porquê? **Questão 6)** Na opinião do grupo, que fatores são determinantes para a compreensão, manipulação e controle dos fluxos (de S para I e de I para R), ou seja, que fatores influenciam para que haja aumento no número de Infectados (It) e do número de Recuperados (Rt)?

Fonte: Elaboração do autor (2021).

Portanto, uma vez que as EDO que definem o Modelo SIR são construídas a partir das simplificações atribuídas ao fenômeno a ser modelado, a análise do modelo inicia com este debate sobre suas simplificações e condições de uso.

Durante a discussão dos grupos, o mediador deve se colocar à disposição para sanar as possíveis dúvidas que os estudantes venham a enfrentar, onde sugerimos que os direcionamentos favoreçam a autonomia investigativa dos estudantes, questionando suas hipóteses, levantando possíveis contrapontos e sugerindo ponderações críticas acerca das hipóteses levantadas de modo a proporcionar ao grupo uma argumentação coletiva que desponte o acordo estabelecido pelo debate entre os estudantes.

As expectativas é que os estudantes reflitam criticamente as condições de simplificação do Modelo SIR com o que eles compreendem acerca do comportamento de pandemias e epidemias, em específico à recente pandemia do Coronavirus que introduz o debate acerca de epidemias através da Situação Desencadeadora da Aprendizagem (SDA).

Neste sentido, através da Análise de Modelos enquanto abordagem pedagógica (SOARES, 2012) e (JAVARONI; SOARES, 2012), espera-se que os estudantes critiquem aspectos como: o número populacional ser constante, o que significa que, durante a pandemia, não há taxa de natalidade ou mortalidade (não relacionada à pandemia); o comportamento variacional das variáveis em destaque ao longo do tempo, ou seja, que seus valores mudam de uma maneira particular com o avanço da pandemia; os fatores determinantes para que os sujeitos migrem de uma população para outra, o que está relacionado aos parâmetros epidêmicos; comparações das simplificações atribuídas ao modelo com o comportamento da pandemia do coronavírus a partir do ponto de vista dos estudantes.

Assim buscamos que os estudantes se apropriem das análises levantadas e dos sentidos atribuídos qualitativamente às EDOs que descrevem do modelo.

2.2 Analisando comportamentos hipotéticos da COVID-19 pelo Modelo SIR

Para a análise dos resultados das EDOs que descrevem o Modelo SIR, construímos um documento no Excel[3] que apresenta os resultados (numéricos/tabulares e gráficos) dos 300 primeiros dias de pandemia. Neste documento, os estudantes encontram como controle variável os parâmetros epidêmicos do Modelo SIR em simulação pelo excel, conforme Figura 3.

Figura 3: Parâmetros epidêmicos do Modelo SIR

Parâmetros epidemiológicos	
População	210407125
Duração media da doença	14
Taxa diaria de interação	10,0
Probabilidade de contaminação	1,83%
Taxa de Recuperação	80%
Taxa de Mortalidade	20%

Fonte: Captura de tela de planilha do *Excel*, elaboração do autor (2021).

Sugerimos que os estudantes sejam divididos em grupos (3 grupos) e que cada grupo realize a manipulação nos parâmetros epidemiológicos e que norteiem o debate em grupo a partir das orientações de simulação do Modelo SIR, conforme quadro 3, que constam da versão do estudante deste Produto Educacional, reservando o tempo de 10 minutos para que os grupos manipulem os parâmetros seguindo as orientações, e

debatam acerca do comportamento variacional.
Obs.: A manipulação de outros parâmetros, bem como outras metodologias podem ser adotadas pelo mediador da proposta de ensino e aprendizagem, de modo a adaptar a tarefa às necessidades mais específicas do público.

Quadro 3 – Orientações aos grupos para análise de simulação do Modelo SIR

Grupo	Manipulação de parâmetros epidemiológicos
Grupo 1	Tarefa: Realizando alterações no valor da **Taxa de Interação Diária** e mantendo os demais parâmetros constantes, o que o grupo observa acerca do comportamento das variáveis I, R e O ao longo do tempo na simulação do modelo SIR expressa na tabela e no gráfico?
Grupo 2	Tarefa: Realizando alterações no valor da **Probabilidade de Contaminação** e mantendo os demais parâmetros constantes, o que o grupo observa acerca do comportamento das variáveis I, R e O ao longo do tempo na simulação do modelo SIR expressa na tabela e no gráfico?
Grupo 3	Tarefa: Realizando alterações no valor da **Taxa de Recuperação** e mantendo os demais parâmetros constantes, o que o grupo observa acerca do comportamento das variáveis I, R e O ao longo do tempo na simulação do modelo SIR expressa na tabela e no gráfico?

Fonte: Elaboração do autor (2021).

A planilha de simulação do Modelo SIR é uma planilha de controle dinâmico a partir dos parâmetros epidemiológicos mostrados na figura 3. A tarefa consiste em, a cada mudança do valor dos parâmetros epidêmicos, o software simula os resultados das EDO que descrevem o comportamento variacional das variáveis I, R e O (numéricos/discretos, na forma tabular; e contínuo, na forma gráfica).

Apresentar as Equações Diferenciais Ordinárias do Modelo SIR e os métodos de resolução que apresentam os seus resultados não seria compatível ao nível do público destinado a este Produto Educacional (estudantes do ensino médio), uma vez que estes temas são reservados, atualmente, aos cursos superiores de graduação e pós graduação, através dos estudos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias e Sistemas de Equações Diferenciais Ordinários.

É neste sentido, de adequar o nível de tratamento dos temas propostos ao ensino e aprendizagem, que a construção da simulação do modelo pelo Excel se assenta, pois é a partir da análise qualitativa destes resultados, que expressam o comportamento variacional das variáveis do fenômeno, uma vez que as EDO expressam taxas de variação, que é possível estudar o modelo matemático, compreendendo a forma particular de variação destas variáveis e as influências que os parâmetros epidemiológicos implicam nesta variação.

As figuras 4 e 5 trazem, respectivamente, exemplos dos resultados (numéricos e gráficos) apresentados pela simulação.

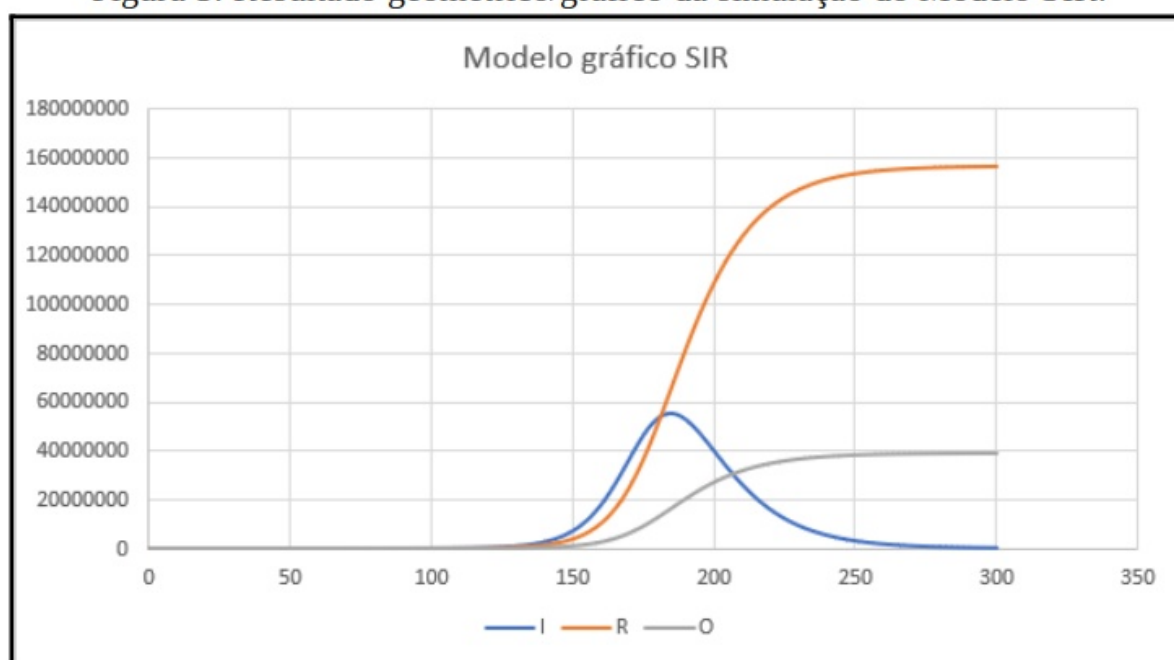
Figura 4: Resultados numéricos da simulação do Modelo SIR

Dias	S	I	R	O	Contagios	Recuperações	Óbitos
0	210.407.125	1	0	0			
1	210.407.125	1	0	0	0	0	0
2	210.407.125	1	0	0	0	0	0
3	210.407.124	1	0	0	0	0	0
4	210.407.124	2	0	0	0	0	0
5	210.407.124	2	0	0	0	0	0
6	210.407.124	2	0	0	0	0	0
7	210.407.123	2	1	0	0	0	0
8	210.407.123	2	1	0	0	0	0
9	210.407.122	3	1	0	0	0	0
10	210.407.122	3	1	0	0	0	0
11	210.407.121	3	1	0	1	0	0
12	210.407.121	4	1	0	1	0	0
13	210.407.120	4	2	0	1	0	0
14	210.407.119	4	2	0	1	0	0
15	210.407.119	5	2	0	1	0	0
16	210.407.118	5	2	1	1	0	0
17	210.407.117	6	3	1	1	0	0
18	210.407.116	7	3	1	1	0	0
19	210.407.114	7	3	1	1	0	0
20	210.407.113	8	4	1	1	0	0
21	210.407.112	9	4	1	2	0	0
22	210.407.110	10	5	1	2	1	0
23	210.407.108	11	5	1	2	1	0
24	210.407.106	13	6	1	2	1	0
25	210.407.104	14	7	2	2	1	0
26	210.407.101	16	8	2	3	1	0
27	210.407.098	17	8	2	3	1	0
28	210.407.095	19	9	2	3	1	0
29	210.407.091	21	10	3	4	1	0
30	210.407.087	24	12	3	4	1	0

Fonte: Elaboração do autor (2021).

Obs.: Na simulação no Excel, são apresentados na tabela os 30 primeiros dias de epidemia para o modelo SIR.

Figura 5: Resultado geométrico/gráfico da simulação do Modelo SIR.

Modelo gráfico SIR

Fonte: Elaboração do autor (2021).

Durante esta tarefa em grupos, o mediador deve se colocar na mesma posição da parte anterior a essa, sanando as possíveis dúvidas e entraves dos debates de cada grupo, favorecendo a autonomia investigativa e as tomadas de decisão coletiva de cada grupo de estudantes.

2.3 Socialização dos trabalhos de grupo

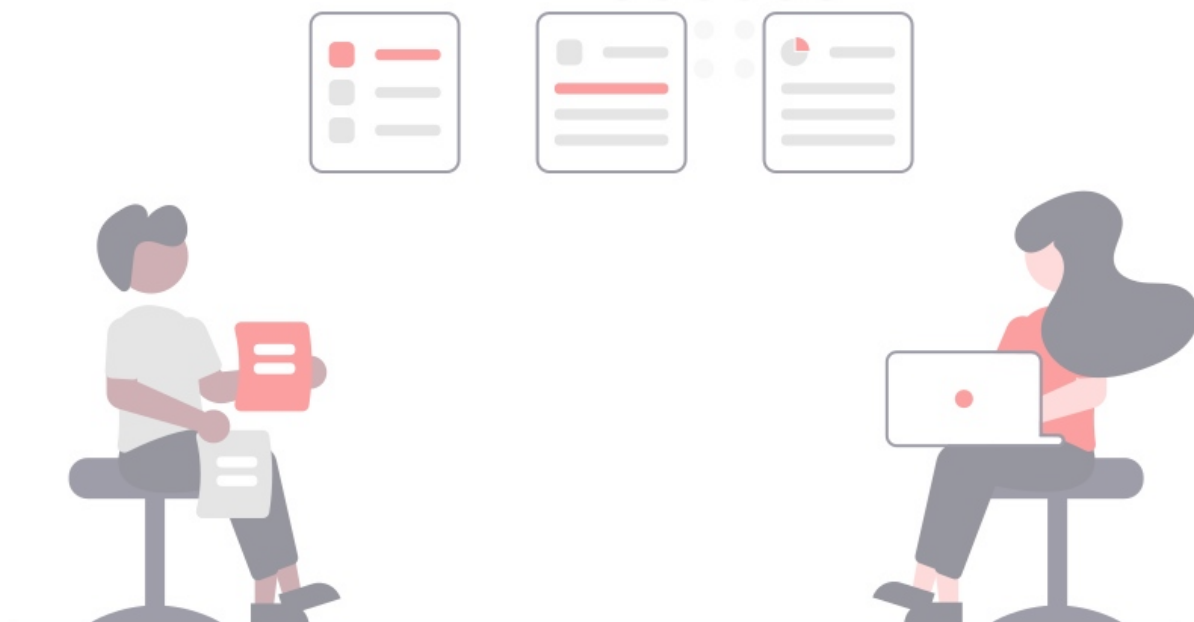
Concluída a tarefa de análise e discussões dos grupos, para socializar a compartilhar os temas debatidos em cada grupo com os demais colegas, propomos que a apresentação das conclusões ocorram no debate coletivo do grupo. Este momento é fulcral para a finalização da tarefa.

É neste processo de socialização dos debates que os estudantes, de uma forma mais ampla, compreendem diferentes características do modelo em análise, desde os estudos das condições iniciais de uso do modelo, através dos questionamentos do vídeo, bem como da análise dos resultados e do papel dos parâmetros epidemiológicos nestes resultados.

A escolha metodológica foi de cada grupo estudar uma parte do fenômeno, e na socialização deste estudo, os estudantes podem apropriar-se de outras características estudadas pelos outros grupos, além de compartilharem as conclusões debatidas na sua equipe.

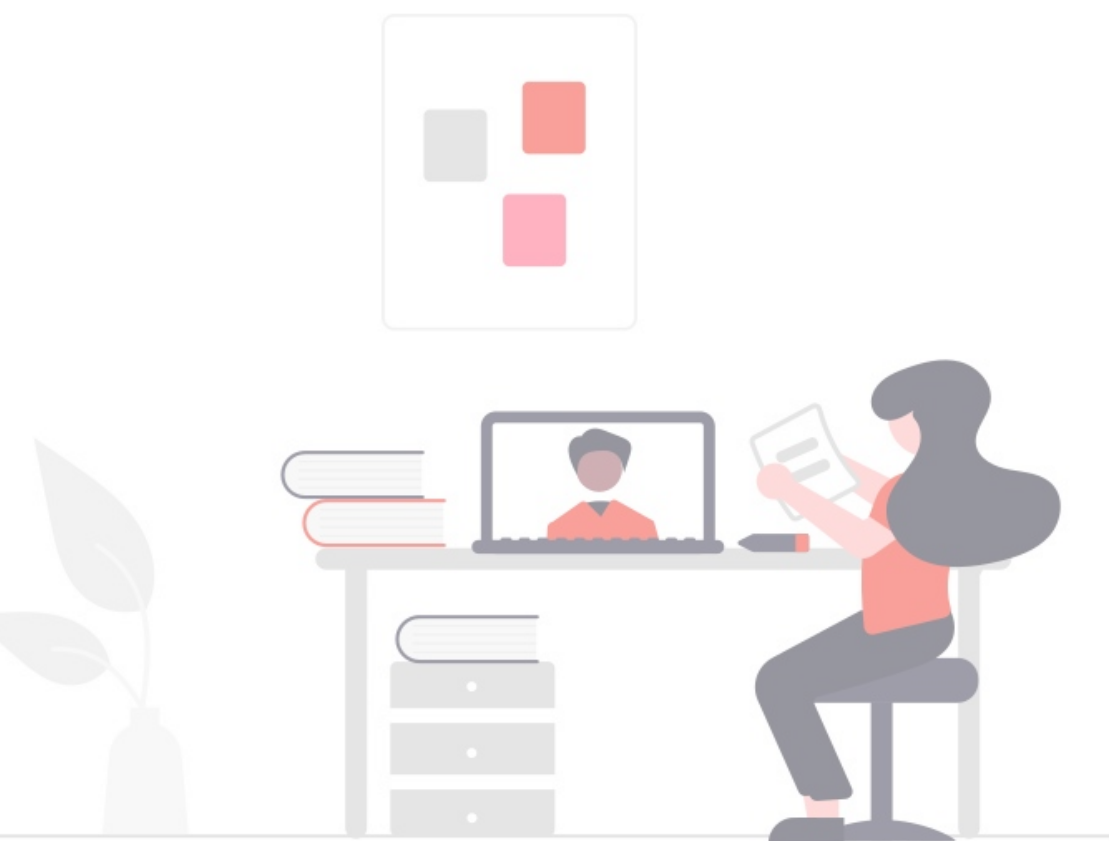
O mediador deve proporcionar um espaço de diálogo aberto, destinando tempo de fala (10 minutos por grupo) e, sempre que necessário, abrir o debate para os demais estudantes e estimular maiores aprofundamentos qualitativos à análise realizadas pelos estudantes com questionamentos que surjam da aplicação.

Prever o que os estudantes podem apresentar em específico não é possível a priori, no entanto, o debate orientado pelo mediador, após explanação do grupo e identificada a ausência de algumas observações, pode sugerir: que parâmetros epidemiológicos oferecem maior influência no comportamento variacional das variáveis em análise; que valores assumidos pelos parâmetros apresentam resultados mais coerentes com os comportamentos da COVD-19 que eles conhecem a partir das informações que eles pesquisam ou que são divulgadas através das mídias de comunicação, como na manchete da SDA; que políticas púbicas podem ser estruturadas a partir da análise das influências dos parâmetros epidemiológicos.

Outras questões devem aparecer a partir do debate no grande grupo, tanto pelo mediador que objetiva o ensino e aprendizagem de conceitos específicos, bem como pelos estudantes, que objetivam apropriar-se destes conceitos.

Síntese de aprendizagem:

Esta atividade finaliza com o debate aberto acerca das análises do Modelo SIR, aos seus resultados gráficos e numéricos, discutindo, primeiramente, as simplificações do modelo.

O objetivo do Produto Educacional é de trazer ao cenário educacional, enquanto objeto de conhecimento, a ideia fundamental de variação. Esta ideal de variação, apesar de parecer intuitiva e desinteressada, é, na verdade, transversal a diferentes unidades temáticas do ensino da matemática, oferecendo as bases para a construção de conhecimentos matemáticos e contribuindo significativamente para o desenvolvimento matemático dos estudantes.

Com o fechamento desta tarefa, com a execução de ações e operações orientadas ao ensino e aprendizagem, os objetivos do Produto Educacional são atingidos, oferecendo significativas contribuições à construção do pensamento variacional, ao estudo da matemática em uma perspectiva holística, favorecendo a possibilidade de uma formação científica crítica e reflexiva acerca da realidade vivenciada pelo contexto social no qual estão inseridos os estudantes.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio.** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2018.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa: Fotogravura Nacional, 1951.

G1. **Brasil segue com média móvel de mortes por Covid acima de 500; total de óbitos passa de 174,5 mil.** [on-line]. 2020. Disponível em: https://g1.globo.com/bemestar/coronavirus/noticia/2020/12/02/casos-e-mortes-por-coronavirus-no-brasil-em-2-de-dezembro-segundo-consorcio-de-veiculos-de-imprensa.ghtml. Acesso em: 08 de fev. 2021

JAVARONI, Sueli Liberatti; SOARES, Débora da Silva. **Modelagem Matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática. Acta Scientiae**, v.14, n.2, p. 260-275, 2012.

KERMACK, William Ogilvy., McKENDRICK, Anderson Gray. 1991. **Contributions to the mathematical theory of epidemics-II. The problem of endemicity. Bulletin of Mathematical Biology** 53 (1-2), 57-87. DOI :10.1007/BF02464424.

SOARES, Débora da Silva. **Uma abordagem pedagógica baseada na análise de modelos para alunos de biologia: qual o papel do software?**. 2012. 341 p. Tese - (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2012. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/102100>.

VEJA, Revista. **Números Mirabolantes**. Youtube. 2012. Disponível em : < https://www.youtube.com/watch?v=NTPij5ajhuM> Acesso em: 01 jan. 2021.